

الفصل الثانـــى

٢-٤ المحـــددات وقـــاعـدة كـرامــر

Determinants and Cramer's Rule

يمكنك استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات أيضًا.

مفهوم أساسي — **استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات**

أضف إلى مطويتك

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= m \\ fx + gy + hz &= n \\ jx + ky + \ell z &= p \end{aligned}$$

، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$$

وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.



الفصل الثانى
٢-٤ المحددات وقاعدة كرامر
Determinants and Cramer's Rule

مثال 5 حل نظام من ثلاث معادلات

حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$4x + 5y - 6z = -14$$
$$3x - 2y + 7z = 47$$
$$7x - 6y - 8z = 15$$

احسب محدّدة مصفوفة المعاملات

$$|C| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix} = 621$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -14 & 5 & -6 \\ 47 & -2 & 7 \\ 15 & -6 & -8 \end{vmatrix}}{621}, \quad = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -14 & -6 \\ 3 & 47 & 7 \\ 7 & 15 & -8 \end{vmatrix}}{621}, \quad = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -14 \\ 3 & -2 & 47 \\ 7 & -6 & 15 \end{vmatrix}}{621}$$

$$= \frac{3105}{621} = 5, \quad = -\frac{1242}{621} = -2, \quad = \frac{2484}{621} = 4$$



الفصل الثانى

٢-٤ المحددات وقاعدة كرامر

Determinants and Cramer's Rule

وعليه يكون حل النظام هو $(5, -2, 4)$

تحقق :

$$4(5) + 5(-2) - 6(4) \stackrel{?}{=} -14$$
$$20 - 10 - 24 \stackrel{?}{=} -14$$
$$-14 = -14 \checkmark$$

$$7(5) - 6(-2) - 8(4) \stackrel{?}{=} 15$$
$$35 + 12 - 32 \stackrel{?}{=} 15$$
$$15 = 15 \checkmark$$

$$3(5) - 2(-2) + 7(4) \stackrel{?}{=} 47$$
$$15 + 4 + 28 \stackrel{?}{=} 47$$
$$47 = 47 \checkmark$$

إرشادات للدراسة

التحقق من الحل

للتحقق من الحل، عوض القيم في المعادلات الأصلية.



تحقق من فهمك :-

5) حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

5A)

$$\begin{aligned} 3x + 5y + 2z &= -7 \\ -4x + 3y - 5z &= -19 \\ 5x + 4y - 7z &= -15 \end{aligned}$$

$$C = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix} = -330 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 5 & 2 \\ -19 & 3 & -5 \\ -15 & 4 & -7 \end{vmatrix}}{-330} = \frac{23}{22}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -4 & -19 & -5 \\ 5 & -15 & -7 \end{vmatrix}}{-330} = \frac{-57}{22} \text{ ، } z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 \\ -4 & 3 & -19 \\ 5 & 4 & -15 \end{vmatrix}}{-330} = \frac{31}{22}$$

إذن حل النظام هو $\left(\frac{23}{22}, \frac{-57}{22}, \frac{31}{22}\right)$

تحقق من فهمك :-

5) حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

(5B

$$\begin{aligned} 6x + 5y + 2z &= -1 \\ -1x + 3y + 7z &= 12 \\ 5x - 7y - 3z &= -52 \end{aligned}$$

$$C = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 384 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 12 & 3 & 7 \\ -52 & -7 & -3 \end{vmatrix}}{384} = -4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -1 & 12 & 7 \\ 5 & -52 & -3 \end{vmatrix}}{384} = 5 \quad ، \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 12 \\ 5 & -7 & -52 \end{vmatrix}}{384} = -1$$

إذن حل النظام هو (1- ، 5 , 4-)

تـــأكـد :-

مثال 1

جد قيمة كل محددة مما يأتي :

1) $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

= 8 *7 – 5 * 6

= 56 - 30

= 26

2) $\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$

= -6 *10 – (-6) * 8

= -60 +48

= - 12

3) $\begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$

= -4 *5 – 12 * 9

= -20 - 108

= - 128

4) $\begin{vmatrix} 16 & -10 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}$

= 16 *5 – (-10) * (-8)

= 80 - 80

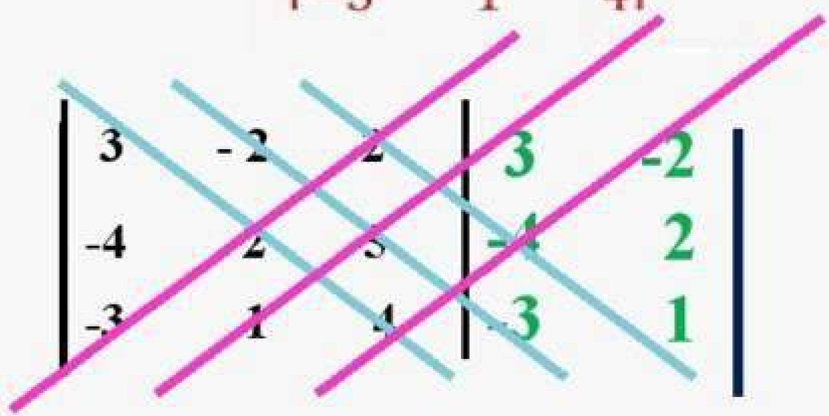
= 0

تـــأكـد :-

مثال 2

جد قيمة كل محددة مما يأتي باستعمال قاعدة الأقطار:

$$5)\ \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$



$= (3*2*4+(-2)*-5*-3 +2*(-4)*1) -((-2)*(-4)*4+3*(-5)*1 +2*2*(-3))$

$= (24-30 - 8)\ - (32 - 15 - 12)$

$= (-14)\ - 5$

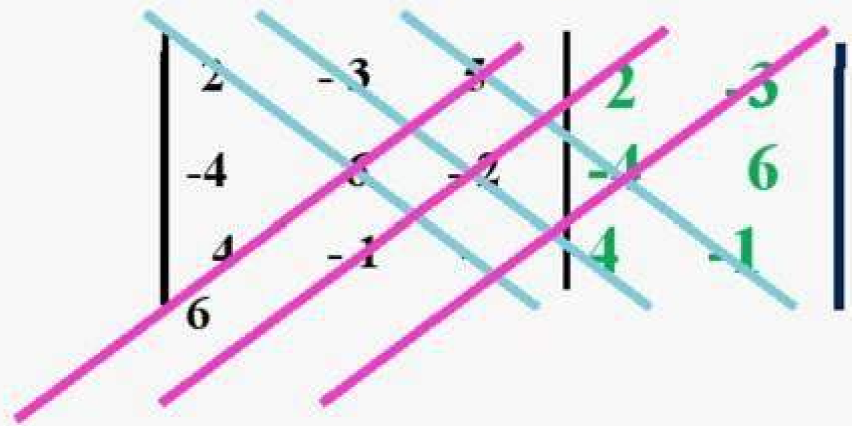
$= -19$

تـــأكـد :–

مثال 2

جد قيمة كل محددة مما يأتي باستعمال قاعدة الأقطار:

$$6)\quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -1 & -6 \end{vmatrix}$$



= (2*6*(-6)+(-3)*-2*4 +5*(-4)*(-1)) - ((-3)*(-4)*(-6)+2*(-2)*(-1) +5*6*4)

= (-72+24+20) - (-72+4+ 120)

= - 28 – 52

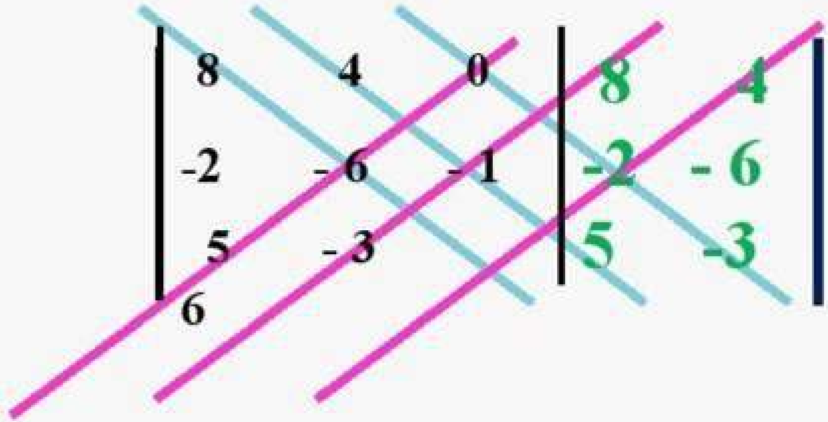
= - 80

تـــأكــد :-

مثال 2

جد قيمة كل محددة مما يأتي باستعمال قاعدة الأقطار:

$$7)\ \begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$



= (8)*(-6)*6+ 4*-1*5+0*(-2)*(-3)) - (4*(-2)*6+8*(-1)*(-3) +0*(-6)*5)

= (-288 – 20 + 0) - (- 48+ 24+ 0)

= - 308 + 24

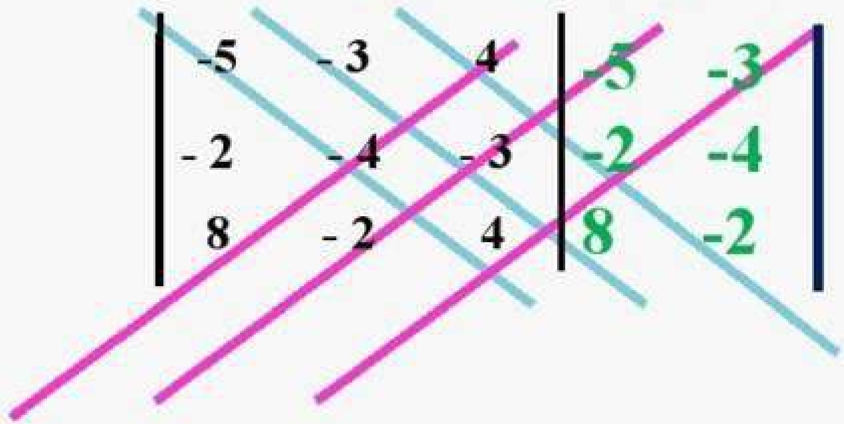
= - 284

تـــأكـد :-

مثال 2

جد قيمة كل محددة مما يأتي باستعمال قاعدة الأقطار:

8) $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ -2 & -4 & -3 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix}$



= (-5)*(-4)*4+ (-3)*(-3)*8+4*(-2)*(-2)) - ((-3)*(-2)*4+(-5)*(-3)*(-2) +4*(-4)*8)

= (80 + 72 + 16) - (24 - 30- 128)

= 166 + 134

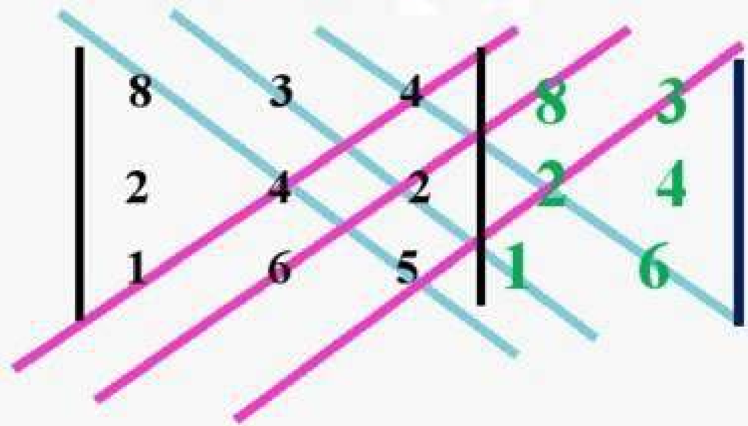
= 302

تـــأكـد :ـ

مثـال 2

جد قيمة كل محددة مما يأتي باستعمال قاعدة الأقطار:

9) $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$



= 8*4*5+ 3*2*1+4*2*6) -(3*2*5+8*2*6 +3*2*5)

= (160 + 6 + 48) - (30 + 96 +16)

= 214 - 142

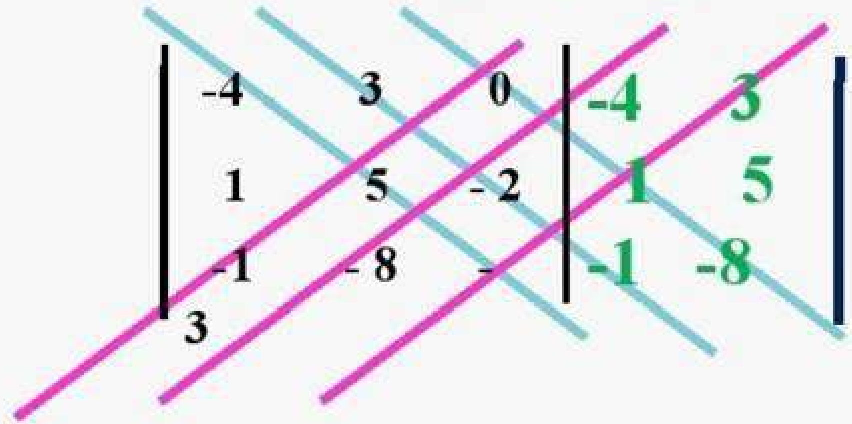
= 72

تـــأكـد :-

مثال 2

جد قيمة كل محددة مما يأتي باستعمال قاعدة الأقطار:

10) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & -8 & -3 \end{vmatrix}$



$= ((-4)*5*(-3)+ 3*(-2)*(-1)+0*(-2)*(-8)) \;-\; (3*1*(-3)+(-4)*(-2)*(-8) +0*5*(-1))$

$= (60 + 6 + 0) - (-9 \;\; -64 +0)$

$= 66 \;\; +73$

$= \;\; 139$

تـــأكـد :-

مثال 3

11 جغرافيا: استعمل الخريطة الإحداثية المجاورة، التي تظهر منطقة مثلث برمودا، للإجابة عما يأتي:

a) احسب مساحة منطقة مثلث برمودا على الخريطة.

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 9 & 1 & 1 \\ 9.5 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

= 15.75 وحدة مربعة

b) إذا كان طول كل وحدة على الخريطة تمثل 175ميلاً في الواقع، فأوجد مساحة نقطة مثلث برمودا الحقيقية.



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 700 & 700 & 1 \\ 1575 & 175 & 1 \\ 1662.5 & 1225 & 1 \end{vmatrix}$$

= 482343.75 ميل مربع

تـــأكـد :–

مثـال 4

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

12)

$$4x - 5y = 39$$

$$3x + 8y = -6$$

$$C = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 4(8) - 3(-5)$$

$$= 47 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{C} = \frac{\begin{vmatrix} 39 & -5 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}}{47} = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{C} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 39 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}}{47} = -3$$

حل النظام هو: (6, -3)

تـــأكـد :-

مثال 4

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

13) $10c - 7d = -59$

$6c + 5d = -63$

$$C = \begin{vmatrix} 10 & -7 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 92 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -59 & -7 \\ -63 & 5 \end{vmatrix}}{92} = -8$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -59 \\ 6 & -63 \end{vmatrix}}{92} = -3$$

حل النظام هو: (3− , 8−)

تـــأكـد :-

مثال 5

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

14)

$$4x - 2y + 7z = 26$$

$$5x + 3y - 5z = -50$$

$$-7x - 8y - 3z = 49$$

$$C = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 5 & 3 & -5 \\ -7 & -8 & -3 \end{vmatrix} = -429 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 26 & -2 & 7 \\ -50 & 3 & -5 \\ 49 & -8 & -3 \end{vmatrix}}{-429} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 26 & 7 \\ 5 & -50 & -5 \\ -7 & 49 & -3 \end{vmatrix}}{-429} = -5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 26 \\ 5 & 3 & -50 \\ -7 & -8 & 49 \end{vmatrix}}{-429} = 4$$

إذن حل النظام هو (4, -5 , -3)



تـــــأكـــد :-

مثـال 5

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام معادلات مما يأتي:

15)

$$6x - 5y + 2z = -49$$
$$-5x - 3y - 8z = -22$$
$$-3x + 8y - 5z = 55$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 6 & -5 & 2 \\ -5 & -3 & -8 \\ -3 & 8 & -5 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 6 & -5 \\ -5 & -3 \\ -3 & 8 \end{array}\Bigg|$$

C = (90-120-80) – (-125-384+18)

C = 381

$$\left|\begin{array}{ccc} -49 & -5 & 2 \\ -22 & -3 & - \\ 8\;55 & 8 & -5 \end{array}\right| \begin{array}{cc} -49 & -5 \\ -22 & -3 \\ 55 & 8 \end{array}\Bigg|$$

Δx = (-735+2200-352) – (-550+3136-330)

Δx = -1143

$$\left|\begin{array}{ccc} 6 & -49 & 2 \\ -5 & -22 & - \\ 8\;-3 & 55 & - \end{array}\right| \begin{array}{cc} 6 & -49 \\ -5 & -22 \\ -3 & 55 \end{array}\Bigg|$$

Δy = (660-1176-550) – (-1225-2640+132)

Δx = 2667



تــــأكـد :ـ

15) $6x - 5y + 2z = -49$

$-5x - 3y - 8z = -22$

$-3x + 8y - 5z = 55$

6	-5	-49	6	-5
-5	-3	-22	-5	-3
-3	8	55	-3	8

$\Delta z = (-990-330+1960) - (1375-1056-441)$

$\Delta z = 762$

$X = \frac{\Delta x}{C}$ $\quad X = \frac{-1143}{381}$ $\quad X = -3$

$Y = \frac{\Delta y}{C}$ $\quad Y = \frac{2667}{381}$ $\quad Y = 7$

$Z = \frac{\Delta z}{C}$ $\quad Z = \frac{672}{381}$ $\quad Z = 2$

حل النظام هو (-3 ,7 , 2)

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

جد قيمة كل محددة مما يأتي:

16) $\begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

= (- 7) * 6 – 12*5
= - 42 – 60
= - 102

17) $\begin{vmatrix} -8 & -9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$

= (- 8) * 12 – (- 9)*11
= - 96 +99
= 3

18) $\begin{vmatrix} -5 & 8 \\ -6 & -7 \end{vmatrix}$

= (- 5) * (- 7) – 8*(- 6)
= 35 +48
= 83



تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 1,2

جد قيمة كل محددة مما يأتي:

19) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \\ -6 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

$$\left|\begin{matrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \\ -6 & -2 & 5 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 & 5 \\ -1 & -4 \\ -6 & -2 \end{matrix}\right|$$

$= (-60-180-4)-(-25-36-48)$

$= (-244)-(-109)$

$= -135$

إذا كانت عناصر أي صف (أي عمود) في محدد كلها أصفار فإن قيمة المحدد تساوي صفراً.

تـدرب وحـل المسائل :ـ

مثـال 1,2

جد قيمة كل محددة مما يأتي:

$$20)\quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 2 & 0 & -6 \\ -3 & -4 & -5 \\ -2 & 5 & 8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 0 \\ -3 & -4 \\ -2 & 5 \end{matrix}\right|$$

$$= (-64+0+90)-(0-50-48)$$

$$= (26)-(-98)$$

$$= 124$$

إذا كانت عناصر أي صف (أي عمود) في محدد كلها أصفار فإن قيمة المحدد تساوي صفراً.



تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

جد قيمة كل محددة مما يأتي:

21) $\begin{vmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & 9 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 1 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} -5 & -1 \\ 1 & 8 \\ 0 & -6 \end{matrix}$$

$= (-360+0+12)-(-9+120+0)$

$= (-348)-(111)$

$= -459$

إذا كانت عناصر أي **صف** (أي عمود) في محدد كلها أصفار فإن قيمة المحدد تساوي صفراً.



مثال 3

22) علم الآثار: وجد عالم آثار عظام حوت عند الإحداثيات (5 ,9) ، (7 , 4) , (3, 0) على الخريطة. فإذا كانت الإحداثيات بالأمتار. فجد مساحة المثلث الذي رؤوسه تلك النقاط.

$$|A| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 9 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 5 & 9 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 5 & 9 \\ 4 & 7 \\ 0 & 3 \end{matrix}\Bigg|$$

$$= \left|(5*7*1+9*1*0+1*4*3) - (9*4*1+5*1*3+1*7*0)\right|$$

$$= \left|(35+0+12) - (36+15+0)\right|$$

$$= \left|47 - 51\right| = 4 * \frac{1}{2}$$

$$= 2\ m^2$$

مثال 4,5

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام مما يأتي:

23)

$$6x - 5y = 73$$
$$-7x + 3y = -71$$

$$C = \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \quad C = 6*3 - (-5)*(-7) \quad C = 18 - 35 \quad C = -17$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 73 & -5 \\ -71 & 3 \end{vmatrix} \quad \Delta x = 3*73 - (-5)*(-71) \quad \Delta x = 219 - 355 \quad \Delta x = -136$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 6 & 73 \\ -7 & -71 \end{vmatrix} \quad \Delta y = 6*-71 - 73*(-7) \quad \Delta y = -426 + 511 \quad \Delta y = 85$$

$$X = \frac{-136}{-17} \qquad y = \frac{85}{-17}$$

$$X = 8 \qquad y = -5$$

(8 , -5)



مثال 4,5

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام مما يأتي:

24)

$$6x - 5y = 73$$
$$-7x + 3y = -71$$

$$C = \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \quad C = 10*8-(-3)*3 \quad C = 80+9 \quad C = 89$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -34 & -3 \\ -28 & 8 \end{vmatrix} \quad \Delta x = (-34)*8-(-3)*(-28) \quad \Delta x = -272 - 84 \quad \Delta x = -356$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 10 & -34 \\ 3 & -28 \end{vmatrix} \quad \Delta y = 10*-28-(-34)*3 \quad \Delta y = -280+102 \quad \Delta y = -178$$

$$X = \frac{-356}{89} \qquad y = \frac{-178}{89}$$

$$X = -4 \qquad y = -2$$

$$(-4\ ,\ -2)$$



تـدرب وحـل المسائل :-

مثال 4,5

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام مما يأتي:

25)
$$5x - 4y + 6z = 58$$
$$-4x + 6y + 3z = -13$$
$$6x + 3y + 7z = 53$$

5	-4	6	5	-4
-4	6	3	-4	6
6	3	7	6	3

C = (210 –72 – 72) – (112+45+216)

C = -307

58	-4	6	58	-4
-13	6	3	-13	6
53	3	7	53	3

Δx = (2436-636-234) – (364+522+1908)

Δx = -1228

5	58	6	5	58
-4	-13		-4	-13
36	53		6	53
7				

Δy = (-455+1044-1272) – (-1624+795-468)

Δy = 614

5	-4	58	5	-4
-4	6	-13	-4	6
6	3	53	6	3

$\Delta z = (1590+312-696) - (848-195+2088)$

$\Delta z = -1535$

$X = \dfrac{\Delta x}{C}$ $\quad X = \dfrac{-1228}{-307}$ $\quad X = -4$

$Y = \dfrac{\Delta y}{C}$ $\quad Y = \dfrac{614}{-307}$ $\quad Y = -2$

$Z = \dfrac{\Delta z}{C}$ $\quad Z = \dfrac{-1535}{-307}$ $\quad Z = 5$

حل النظام هو (-4 , -2 , 5)

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 4,5

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام مما يأتي:

26)
$$8x - 4y + 7z = 34$$
$$5x + 6y + 3z = -21$$
$$3x + 7y - 8z = -85$$

8	-4	7	8	-4
5	6	3	5	6
3	7	-8	3	7

C = (-384 –36 +245) – (160+168+126)

C = -629

34	-4	7	34	-4
-21	6	3	-21	6
-85	3	-	-85	3

8

Δx = (-672+1020-441) – (-672+306-3570)

Δx = -1228

8	34	6	5	58
5	-21	3	-4	-13
3	-85	7	6	53

Δy = (-455+1044-1272) – (-1624+795-468)

Δy = 614

26) $8x - 4y + 7z = 34$
$5x + 6y + 3z = -21$
$3x + 7y - 8z = -85$

5	-4	34	5	-4
-4	6	-21	-4	6
6	3	-85	6	3

Δz = (1590+312-696) – (848-195+2088)

Δz = -1535

$$X = \frac{\Delta x}{C} \qquad X = \frac{-1228}{-307} \qquad X = -4$$

$$Y = \frac{\Delta y}{C} \qquad Y = \frac{614}{-307} \qquad Y = -2$$

$$Z = \frac{\Delta z}{C} \qquad Z = \frac{-1535}{-307} \qquad Z = 5$$

حل النظام هو (-4 , -2 , 5)



مثال 3

27) رحلة مدرسية: نظمت مدرسة ثانوية رحلة إلى المدينة المنورة التي تبعد 375 **mi** عن المدرسة. فإذا كان معدل سرعة الحافلة على الطريق السريع **65mi/h**، ومعدل سرعتها داخل المدن 25mi/h،وكان زمن سير الحافلة 7ساعات. فاستعمل قاعدة كرامر لإيجاد عدد ساعات سيرها على الطريق السريع ، وعدد ساعات سيرها داخل المدن.

$$x + y = 7$$

$$65x + 25y = 375$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 65 & 25 \end{vmatrix} = -40 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 375 & 25 \end{vmatrix}}{-40} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 65 & 375 \end{vmatrix}}{-40} = 2$$

أي 5 ساعات على الطريق السريع ، ساعتان داخل المدن .



مثال 4,5 — تدرب وحل المسائل :-

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام مما يأتي:

28)

$$3a - 5b - 9c = 17$$
$$4a - 3c = 31$$
$$-5a - 4b - 2c = -42$$

3	-5	-9	3	-5
4	0	-3	4	0
-5	-4	-2	-5	- 4

C = (0–75 +144) – (40+36+0)

C = -7

17	-5	-9	17	-5
31	0	- 3	31	0
-42	-4	-2	-42	-4

Δx = (0-630+1116) – (310+204+0)

Δx = -28

3	17	-9	3	17
4	31	-3	4	31
-5	-42	-2	-5	-42

Δy = (-186 +255+1512) – (- 136+378+1395)

Δy = -56



28) $3a - 5b - 9c = 17$
$4a - 3c = 31$
$-5a - 4b - 2c = -42$

3	-5	17	3	-5
4	0	31	4	0
-5	-4	-42	-5	-4

$\Delta z = (0+775-272) - (840-372+0)$

$\Delta z = 35$

$X = \dfrac{\Delta x}{C}$ $X = \dfrac{-28}{-7}$ $X = 4$

$Y = \dfrac{\Delta y}{C}$ $Y = \dfrac{-56}{-7}$ $Y = 8$

$Z = \dfrac{\Delta z}{C}$ $Z = \dfrac{35}{-7}$ $Z = -5$

حل النظام هو (4 , 8 , -5)



تدرب وحل المسائل :-

مثال 4,5

استعمل قاعدة كرامر لحل كل نظام مما يأتي:

29)
$$7x + 8y + 9z = -149$$
$$-6x + 7y - 5z = 54$$
$$4x + 5y - 2z = -44$$

7	8	9	7	8
-6	7	-	-6	7
5 4	5	-2	4	5

C = (-98-160-270) – (96-175+252)

C = -701

-149	8	9	-149	8
54	7	-	54	7
5 44	-4	-2	-44	-4

Δx = (2086+1760 -1944) – (-864-2980-2772)

Δx = -8518

7	-149	9	7	-149
-6	54	-	-6	54
5 4	-44	-	4	-44

2

Δy = (-756+2980+2376) – (-1788+1540+1944)

Δy = 2904



تدرب وحل المسائل :-

29)

$$7x + 8y + 9z = -149$$
$$-6x + 7y - 5z = 54$$
$$4x + 5y - 2z = -44$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & -149 \\ -6 & 7 & 54 \\ 4 & 5 & -44 \end{vmatrix} \begin{matrix} 7 & 8 \\ -6 & 7 \\ 4 & 5 \end{matrix}$$

$\Delta z = (-2156+1728+4470) - (2112+1890-4172)$

$\Delta z = -4132$

$$X = \frac{\Delta x}{C} \qquad X = \frac{-8518}{-701} \qquad X = 4$$

$$Y = \frac{\Delta y}{C} \qquad Y = \frac{2904}{-701} \qquad Y = 8$$

$$Z = \frac{\Delta z}{C} \qquad Z = \frac{-4132}{-701} \qquad Z = -5$$

حل النظام هو

$$\left(-8\frac{579}{701} \quad , \quad -4\frac{100}{701} \quad , \quad -6\frac{6}{701}\right)$$



تدرب وحل المسائل :-

(30 صناعة: يبيع مصنع 3 أحجام علب الطلاء الفارغة ، حجم صغير بتكلفة 1.15 ريال للعلبة، وحجم متوسط بتكلفة 1.75 ريال للعلبة، وحجم كبير بتكلفة 2.25 ريال للعلبة، وفي أحد الأيام أنتج من علب الحجم الصغير ضعف ما أنتجه من علب الحجم المتوسط ، وكان مجموع ما أنتجه في ذلك اليوم 1385 علبة من جميع الأحجام، بتكلفة إجمالية قدرها 2238.75ريالاً.

a) استعمل قاعدة كرامر لإيجاد عدد العلب التي أنتجها المصنع من كل حجم في ذلك اليوم.

$$x + y + z = 1385$$
$$1.15x + 1.75y + 2.25z = 2238.75$$
$$x = 2y$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.15 & 1.75 & 2.25 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2.7 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1385 & 1 & 1 \\ 2238.75 & 1.75 & 2.25 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{2.7} = 650$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1385 & 1 \\ 1.15 & 2238.75 & 2.25 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{2.7} = 325$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1385 \\ 1.15 & 1.75 & 2238.75 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{2.7} = 410$$

صغير 650 ; وسط : 325 ; كبير : 410

b) إذا زادت تكلفة إنتاج علب الحجم الصغير فقط في اليوم التالي لتصبح 1.25 ريال بعد زيادة قليلة في الحجم ، فأوجد تكلفة الإنتاج في اليوم التالي إذا كان إنتاج المصنع مقارنة باليوم السابق أقل بـ 140 علبة من الحجم الصغير، وأكثر بـ 125 علبة من الحجم المتوسط ، وأكثر بـ 35 علبة من الحجم الكبير.

$650 + 325 + 410 = 1385$

$510(1.25) + 452(1.75) + 445(2.25)$

= 2426.25 ريالاً

الفهرس

تـدرب وحـل المسـائل :-

(31 بستنه: أراد حمد إنشاء حديقة مثلثية الشكل في فناء منزله، فرسم لها مخططاً على المستوى الإحداثي، فكانت إحداثيات رؤوس الحديقة على المستوى (3-, 4) , (6, 2) , (7 , 1-). جد المساحة الحقيقية للحديقة إذا كانت كل وحدة على المستوى الإحداثي تمثل متراً على الأرض.

$$A=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & -3 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 6 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 7 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right|$$

$$A = \frac{1}{2}[(24+3+14)-(-6+28-6)]$$

$$A = \frac{1}{2}(41-16) \qquad A = 12.5\ m^2$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 12.5m^2$$

الفهرس

٢-٥ النظير الضربى للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

Inverse Matrices and Systems of Linear Equations

- أجد النظير الضربي لمصفوفة من النوع 2×2.
- أكتب معادلات مصفوفية لنظام من معادلتين وأحلها.

المفردات:

مصفوفة الوحدة
identity matrix

النظير الضربي للمصفوفة
inverse matrix

المعادلة المصفوفية
matrix equation

مصفوفة المتغيرات
variable matrix

مصفوفة الثوابت
constant matrix

مصفوفة المعاملات
coefficient matrix

لماذا؟

يبين الشكل المجاور أسعار وجبة الغداء في مطعم. ولتحديد سعر كل من الشطيرة، وعلبة المقبلات، وعلبة العصير، يمكنك إيجاد قيم المتغيرات w, s, d التي تحقق المساواة:



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 19 \\ 38 \end{bmatrix}$$

حيث w تمثل سعر الشطيرة، وs تمثل سعر علبة المقبلات، وd تمثل سعر علبة العصير.

مصفوفة الوحدة ونظير المصفوفة الضربي: تذكّر أنّ عددين من الأعداد الحقيقية يكون كلٌّ منهما نظيرًا ضربيًا للآخر إذا كان حاصل ضربهما هو العنصر المحايد لعملية الضرب. وكذلك الحال في المصفوفات، فإن **مصفوفة الوحدة** هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس تساوي واحدًا، والباقي أصفار.

مصفوفة وحدة من النوع 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة وحدة من النوع 3×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٢-٥ النظير الضربى للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

Inverse Matrices and Systems of Linear Equations

مفهوم أساسي — **المصفوفة المحايدة لعملية الضرب**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: المصفوفة المحايدة لعملية الضرب ورمزها $\underline{I}$ هي مصفوفة الوحدة، والتي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

لأي مصفوفة مربعة $\underline{A}$ لها رتبة مصفوفة الوحدة $\underline{I}$ نفسها، فإن $\underline{A} \cdot \underline{I} = \underline{I} \cdot \underline{A} = \underline{A}$.

الرمـــوز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، وَ $\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

الفصل الثانى

٢-٥ النظير الضربى للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

Inverse Matrices and Systems of Linear Equations

إذا كانت المصفوفتان $\underline{B}$ ،$\underline{A}$ مربعتين ولهما الرتبة نفسها، وكان $\underline{A}\underline{B} = \underline{B}\underline{A} = \underline{I}$ فإن المصفوفة $\underline{B}$ تُسمى **نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة** $\underline{A}$ ، وكذلك تُسمى المصفوفة $\underline{A}$ نظيرًا ضربيًّا للمصفوفة $\underline{B}$. وإذا كان للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي فإنه يرمز إليه بالرمز $\underline{A}^{-1}$، حيث $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{I}$

مثال 1 التحقق من النظير الضربي

حدِّد ما إذا كانت كلّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

(a $\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

كل من المصفوفتين $\underline{A}, \underline{B}$ تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا وفقط إذا كان $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} = \underline{I}$.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$ اكتب المعادلة

$$= \begin{bmatrix} -1+1 & 2-2 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ اضرب المصفوفتين

بما أن $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq I$ ، فإن أيًا منهما لا تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى.

٥-٢ النظير الضربى للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

Inverse Matrices and Systems of Linear Equations

كلٌّ من المصفوفتين F, G تمثل نظيرًا ضربيًا للأخرى إذا وفقط إذا كان $\underline{I} = \underline{F} \cdot \underline{G} = \underline{G} \cdot \underline{F}$

اكتب المعادلة

$$\underline{F} \cdot \underline{G} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{4} - \frac{5}{4} & \frac{15}{8} - \frac{15}{8} \\ -\frac{6}{4} + \frac{6}{4} & -\frac{10}{8} + \frac{18}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اضرب المصفوفتين

اكتب المعادلة

$$\underline{G} \cdot \underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{4} - \frac{10}{8} & -\frac{15}{4} + \frac{30}{8} \\ \frac{3}{4} - \frac{6}{8} & -\frac{5}{4} + \frac{18}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اضرب المصفوفتين

بما أن $\underline{F} \cdot \underline{G} = \underline{G} \cdot \underline{F} = \underline{I}$، فإن كلًّا من المصفوفتين $\underline{F}, \underline{G}$ نظير ضربي للأخرى.

تحقق من فهمك :-

1) حدد إذا كان كل زوج من المصفوفات الآتية يمثل مصفوفة ونظيرها الضربي أم لا:

$$X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$X \cdot Y = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y \cdot X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نعم، كل منهما نظير ضربي للأخرى



الفصل الثانى
٢-٥ النظير الضربى للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

Inverse Matrices and Systems of Linear Equations

يمكنك استعمال المحدِّدات؛ لإيجاد النظير الضربي لمصفوفة ما.

إرشادات للدراسة

لاحظ تبديل موضعي عنصري القطر الرئيس، وتغيير إشارتي عنصري القطر الآخر عند حساب A^{-1} .

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2 × 2

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{|\underline{A}|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$،

وذلك إذا كانت $|\underline{A}| \neq 0$.

لاحظ أنه إذا كانت قيمة محدِّدة مصفوفةٍ ما تساوي صفرًا، فليس للمصفوفة نظير ضربي.

الفصل الثانى

٥-٢ النظير الضربى للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

Inverse Matrices and Systems of Linear Equations

مثال 2 إيجاد النظير الضربي للمصفوفة

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

a) $\underline{P} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$|\underline{P}| = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 - (-10) = 3$$ احسب المحدّدة

بما أن قيمة المحدّدة لا تساوي صفرًا، فإن $\underline{P}^{-1}$ موجودة .

$$\underline{P}^{-1} = 1/|P| = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$ تعريف النظير الضربي للمصفوفة من الرتبة 2×2

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$ $|\underline{P}| = 3$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$ بسّط



تأكد: أوجد ناتجي ضرب المصفوفتين. وإذا كان كلّ من ناتجي الضرب يساوي I، فإن كلتا المصفوفتين نظير ضربي للأخرى.

$$\checkmark \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3}+\frac{10}{3} & \frac{35}{3}-\frac{35}{3} \\ -\frac{2}{3}+\frac{2}{3} & \frac{10}{3}-\frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(b $\underline{Q} = \begin{bmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = -72 - (-72) = 0$$ احسب المحددة

بما أن قيمة المحدّدة تساوي صفرًا، فإن $\underline{Q}^{-1}$ ليس موجودًا.

تحقق من فهمك :-

2) أوجد النظير الضربي للمصفوفة الآتية، إن وجد:

(2A $Y = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

(2B $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 3(-4) - 1(7)$$

$$= -19 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - (-4)(1)$$

$$= 10 \neq 0$$

الفصل الثانى
٢-٥ النظير الضربى للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

Inverse Matrices and Systems of Linear Equations

المعادلات المصفوفية : يمكنك استعمال المصفوفات لتمثيل نظام من المعادلات وحله. فمثلًا، يمكنك كتابة **معادلة مصفوفية** لحل نظام معادلتين خطيتين:

$$\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} ax + by \\ fx + gy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

وَيمكنك التعبير عما سبق بالمعادلة المصفوفية الآتية:

$$\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{B}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات

مصفوفة المتغيرات
المتغيرات في النظام فقط

مصفوفة الثوابت
الثوابت في النظام فقط

إرشادات للدراسة

المعادلات المصفوفية
يمكنك استعمال هذه الطريقة لحل نظام معادلات فقط إذا كان لمصفوفة المعاملات $\underline{A}$ نظير ضربي، أما إذا لم يكن لها نظير ضربي، فيمكن أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول، أو لا يوجد له حل.

٢-٥ النظير الضربى للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

Inverse Matrices and Systems of Linear Equations

مثال 3 من واقع الحياة حل نظام من معادلتين باستعمال المعادلة المصفو

سفر: زوّد سلمان سيارته بالوقود مرتين في أثناء سفره إلى الرياض قادمًا من جدة. فإذا كان سعر البنز المحطة الأولى 0.50 ريال لكل لتر، وفي المحطة الثانية كان السعر 0.45 ريال لكل لتر، وكان مجموع م به سيارته من البنزين 104 لترات، بسعر إجمالي 49 ريالًا. فكم لتر بنزين زوّد به سيارته من كل محطة؟

يكتب نظام المعادلتين الذي يمثل هذه الحالة على النحو الآتي:

$$x + y = 104$$
$$0.50x + 0.45y = 49$$

الخطوة 1: اكتب المعادلة المصفوفية بافتراض أن x عدد لترات البنزين من المحطة الأولى، y عدد لتـ البنزين من المحطة الثانية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.50 & 0.45 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 \\ 49 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: أوجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات.

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{0.45 - 0.50} \begin{bmatrix} 0.45 & -1 \\ -0.50 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{0.05} \begin{bmatrix} 0.45 & -1 \\ -0.50 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 20 \\ 10 & -20 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3: حل المعادلة المصفوفية باستعمال $\underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{B}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 20 \\ 10 & -20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 104 \\ 49 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 60 \end{bmatrix}$$



الربط مع الحياة

هناك 90% من محطات الوقود العاملة في المملكة يديرها أفراد يمتلكون هذه المحطات، بينما 10% فقط من هذه المحطات تديرها شركات متخصصة في مجال تشغيل وإدارة محطات الوقود.

المصدر: الاقتصادية الإلكترونية / العدد 6872 / السبت 16 رمضان 1433هـ/4 أغسطس 2012م

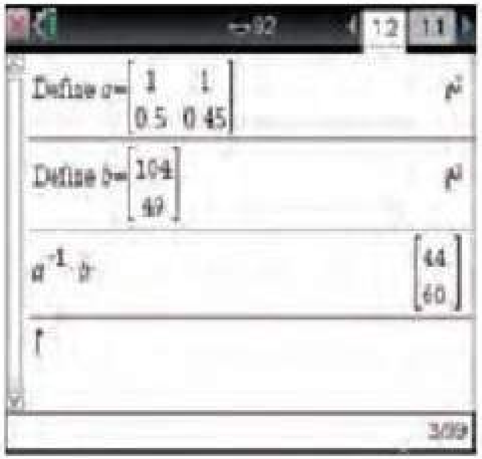
http://www.aleqt.com/2012/08/04/article_680103.html

الفصل الثانى

٥-٢ النظير الضربى للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

Inverse Matrices and Systems of Linear Equations

إذن الحل هو (44, 60) وهذا يعني أن سلمان زوّد سيارته بـ 44 لترًا من المحطة الأولى و 60 لترًا من الثانية.



تحقق: تستطيع التأكد من حلك باستعمال الحاسبة البيانية كالآتي:

أدخل $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.50 & 0.45 \end{bmatrix}$ على صورة مصفوفة $\underline{A}$

بالضغط على المفاتيح (on) [1 مستند جديد] ثم [1: إضافة تطبيق الحاسبة]

ثم الضغط على (menu) [1: الإجراءات] واختر منها [1: Define] "A="

وادخل المصفوفة بالضغط على (menu) [7: المصفوفات و المتجهات] واختر منها [1: إنشاء] [1: المصفوفة ...]

واختر عدد الصفوف وعدد الأعمدة ثم أدخل المصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 0.45 \end{bmatrix}$

كرر ذلك وأدخل $\begin{bmatrix} 104 \\ 49 \end{bmatrix}$ على صورة مصفوفة $\underline{B}$.

اضرب النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A}$ في المصفوفة $\underline{B}$.



تحقق من فهمك :-

3) **كتب:** أنفقت عائشة في معرض للكتب 190 ريالًا لشراء 3 نسخ من كتاب علمي، و 4 نسخ من كتاب ثقافي. في حين أنفقت فاطمة 340 ريالًا لشراء 3 نسخ من الكتاب العلمي نفسه و 10 نسخ من الكتاب الثقافي نفسه، فإذا كان سعر النسخة من الكتاب العلمي هو (x)، ومن الكتاب الثقافي هو (y)، فما سعر الكتاب العلمي؟

$$3x+4y=190$$
$$3x+10y=340$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 190 \\ 340 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 12 = 18$$

$$A = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{18} & \frac{-4}{18} \\ \frac{-3}{18} & \frac{3}{18} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 190 \\ 340 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$X=30$

$y=25$

سعر الكتاب العلمي= 30 ريال

سعر الكتاب الثقافي= 25 ريال



تــــأكـد :-

مثال 1

حدد إذا كانت كل من المصفوفتين تمثل نظيراً ضربياً للأخرى فيما يأتي:

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2) $F = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

لا:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\neq I$$

نعم ؛

$$F \cdot G = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تـــأكـد :-

مثـال 2

جد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

3) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3$

$\frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -6$

$\frac{1}{-6}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

تـــأكـد :-

مثال 3

(5)

نقود: مع أحمد 25 قطعة نقدية من فئة أرباع وأنصاف الريالات، بحيث تبلغ قيمة ما معه 8.5 ريالات. فكم عدد الأرباع والأنصاف التي معه ؟

$$x + y = 25$$
$$0.5x + 0.25y = 8.5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 8.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 0.25 \end{vmatrix} = 0.25 - 0.5 \quad = 0.25$$

نوجد المعكوس الضربي للمصفوفة

$$A = \frac{1}{0.25} \begin{bmatrix} 0.25 & -1 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 8.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

X =9 y =16



تــــأكـــد :ـــ

مثال 3

استعمل معادلة المصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

6) $-2x + y = 9$
$x + y = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$$

$$A = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{-3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 8.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

X =-2

y = 5

الحل هو (-2, 5)



تـــأكـد :ـ

مثال 3

استعمل معادلة المصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

7) $4x - 2y = 22$
$6x + 9y = -3$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} =36+12 =48$$

$$A= \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{48} & \frac{-6}{48} \\ \frac{2}{48} & \frac{4}{48} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$X = 4$

$y = -3$

الحل هو (3− , 4)



تـــأكـد :ــ

مثال 3

استعمل معادلة المصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

8) $-2x + y = -4$
$3x + y = 1$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2-3 = -5$$

$$A = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$X = 1$

$y = -2$

الحل هو (1, -2)

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

حدد إذا كانت كل من المصفوفتين تمثل نظيراً ضربياً للأخرى فيما يأتي:

9) $K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

لا

10) $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

لا

11) $R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

لا

تدرب وحل المسائل :-

مثال 2

جد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي إن وجد:

12) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

13) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$

14) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$

15) $\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$



تدرب وحل المسائل :-

مثال ٣

16) **مشتريات:** دفع سعد 225 ريالًا لشراء 5 أقلام حبر جافة وَ 6 أقلام حبر سائلة، بينما دفع ماجد 120 ريالًا لشراء 3 أقلام جافة من النوع نفسه وَ3 أقلام سائلة من النوع نفسه. فإذا كان سعر القلم الجاف x. وسعر القلم السائل y، فاستعمل معادلة مصفوفية؛ لإيجاد سعر القلم الجاف.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 225 \\ 120 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 15+18 = -3$$

$$A = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 225 \\ 120 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$X = 15$

$y = 20$

سعر القلم الجاف = 15 ريال

سعر القلم السائل = 20 ريال

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

17) سكان: يبين الشكل الآتي نسبة الهجرة السنوية بين أحد المدن وضواحيها.



a) اكتب مصفوفة تمثل هجرة سكان المدينة وسكان الضواحي.

	نسبة الباقين	نسبة المهاجرين
المدينة	0.95	0.05
الضواحي	0.97	0.03

b) إذا كان هناك 16275شخصاً يسكنون المدينة في الوقت الحاضر و 17552شخصاً يسكنون ضواحي المدينة فتوقع عدد سكان ضواحي المدينة في السنة القادمة.

$x = 0.97\,(17552) + 0.05(16275)$

= 17839 تقريباً

تـدرب وحـل المسـائل :-

مثـال 3

استعمل معادلة المصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

18) $-x + y = 4$
$-x + y = -4$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2+1 = 0$$

قيمة محدد المصفوفة يساوي صفر

لا يوجد حل للنظام

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

استعمل معادلة المصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

19) $-x + y = 3$
$-2x + y = 6$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-1+2=1$$

$$A=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ 0\end{bmatrix}$$

$X = -3$

$y = 0$

الحل هو (−3, 0)



تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

استعمل معادلة المصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

20) $x + y = 4$
$-4x + y = 9$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 1+4 = 5$$

$$A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$X = -1$

$y = 5$

الحل هو $(-1, 5)$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

استعمل معادلة المصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

21) $\begin{aligned} 3x + y &= 3 \\ 5x + 3y &= 6 \end{aligned}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & \\ 3 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 5 = 4$$

$$A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$X = \frac{3}{4}$

$y = \frac{3}{4}$

الحل هو $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 3

استعمل معادلة المصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

22)
$$y - x = 5$$
$$2y - 2x = 8$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2+2 = 0$$

قيمة محدد المصفوفة يساوي صفر

لا يوجد حل للنظام

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

استعمل معادلة المصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

23)
$$4x + 2y = 6$$
$$6x - 3y = 9$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 12 = -24$$

$$A = \frac{-1}{24} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{24} & \frac{2}{24} \\ \frac{6}{24} & \frac{4}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{0}{24} \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{3}{2}$$

$$y = 0$$

الحل هو (1.5 , 0)



تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

استعمل معادلة المصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

24) $1.6y - 0.2x = 1$
$0.4y - 0.1x = 0.5$

$$\begin{bmatrix} -0.2 & 1.6 \\ -0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -0.2 & 1.6 \\ -0.1 & 0.4 \end{vmatrix} = -0.08 + 0.16 = 0.8$$

$$A = \frac{1}{0.08} \begin{bmatrix} 0.4 & -1.6 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{40}{8} & \frac{-160}{8} \\ \frac{10}{8} & \frac{-20}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$X = -5$

$y = 0$

الحل هو $(-5, 0)$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

استعمل معادلة المصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

25) $4y - x = -2$
$3y - x = 6$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$$

$$A = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$X = -30$

$y = -8$

الحل هو (8− , 30−)



تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

استعمل معادلة المصفوفية لحل كل نظام فيما يأتي:

26) $2y - 4x = 3$

$4x - 3y = -6$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 12 - 8 = 4$$

$$A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{-2}{4} \\ \frac{-4}{4} & \frac{-4}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 3 \end{bmatrix}$$

$X = \frac{3}{4}$

$y = 3$

الحل هو $(\frac{3}{4} , 3)$



الفصل الثالث

٣-١ الأعداد المركبة

Complex Numbers

فيما سبق:

درستُ تبسيط الجذور التربيعية. (مهارة سابقة)

والآن:

- أجري العمليات على الأعداد التخيلية البحتة.
- أجري العمليات على الأعداد المركبة.

المفردات

الوحدة التخيلية
imaginary unit

العدد التخيلي البحت
pure imaginary number

العدد المركب
complex number

المركبان المترافقان
complex conjugates

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

بالنظر إلى الشكل المجاور، تلاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2 + 2x + 4$ لايقطع المحور x، ولذا فليس للمعادلة جذور حقيقية. فهل يعني ذلك أنه ليس للمعادلة حلول؟

للتأكد من ذلك استعمل الآلة الحاسبة بالضغط على مفتاح (on) ومنها اختر [1 مستند جديد] ثم اختر [1: إضافة تطبيق الحاسبة] ثم اضغط (menu) واختر منها [3: العمليات الجبرية] [3: أدوات كثيرات الحدود] [2: الجذور الحقيقية لكثيرات الحدود]

ثم أدخل $x^2 + 2x + 4$ واضغط (enter) (enter) فيظهر على الشاشة كلمة **خطأ**، وهذا يعني أنه لا توجد حلول حقيقية للمعادلة، ولكن هناك حلول تخيلية.

الأعداد التخيلية البحتة: قادت المعادلات "كالمعادلة السابقة" الرياضيين إلى تعريف الأعداد التخيلية، ووحدتها التخيلية i، حيث تعرف **الوحدة التخيلية** i على أنها الجذر التربيعي الموجب للعدد -1، وبعبارة أخرى فإن: $i = \sqrt{-1}$، وهذا يعني أن $i^2 = -1$

والأعداد على الصورة $6i, -2i, i\sqrt{3}$، تسمى **أعدادًا تخيلية بحتة**، وهي جذور تربيعية لأعداد حقيقية سالبة. لأي عدد حقيقي موجب مثل b، فإن $\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1} = bi$.

الفصل الثالث

٣-١ الأعداد المركبة

Complex Numbers

مثال 1 الجذور التربيعية للأعداد السالبة

بسّط كلًّا ممّا يأتي :

a) $\sqrt{-27}$

$$\sqrt{-27} = \sqrt{-1 \cdot 3^2 \cdot 3}$$
$$= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3}$$
$$= i \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$$
$$= 3i\sqrt{3}$$

b) $\sqrt{-216}$

$$\sqrt{-216} = \sqrt{-1 \cdot 6^2 \cdot 6}$$
$$= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{6^2 \cdot 6}$$
$$= i \cdot 6 \cdot \sqrt{6}$$
$$= 6i\sqrt{6}$$

تحقق الأعداد التخيلية البحتة كلًّا من الخاصيتين التجميعية والتبديلية على الضرب، ويبين الجدول الآتي بعض قوى الوحدة التخيلية i:

$i^4 = (i^2)^2 = 1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^2 = -1$	$i^1 = i$
$i^8 = (i^2)^4 = 1$	$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -i$	$i^6 = (i^2)^3 = -1$	$i^5 = (i^2)^2 \cdot i = i$



الفصل الثالث
٣-١ الأعداد المركبة

تحقق من فهمك :-

1) بسط كلاً مما يأتي:

(1A $\sqrt{-18}$

$$\sqrt{-18} = \sqrt{18}\ .\ i$$
$$= 3\sqrt{2}\ .\ i$$
$$= 3\sqrt{2}\ i$$

$18 = 3^2 . 2$

2	18
3	9
3	3
	1

(1B $\sqrt{-125}$

$$\sqrt{-125} = \sqrt{125}\ .\ i$$
$$= 5\sqrt{5}\ .\ i$$
$$= 5\sqrt{5}\ i$$

$125 = 5^2 . 5$

5	125
5	25
5	5
	1



الفصل الثالث

١-٣ الأعداد المركبة

Complex Numbers

تحقق من فهمك :-

1) بسط كلاً مما يأتي:

1A) $\sqrt{-18}$

$$\sqrt{-18} = \sqrt{18}\ .\ i$$
$$= 3\sqrt{2}\ .\ i$$
$$= 3\sqrt{2}\ i$$

$18 = 3^2 . 2$

2	18
3	9
3	3
	1

1B) $\sqrt{-125}$

$$\sqrt{-125} = \sqrt{125}\ .\ i$$
$$= 5\sqrt{5}\ .\ i$$
$$= 5\sqrt{5}\ i$$

$125 = 5^2 . 5$

5	125
5	25
5	5
	1

٣-١ الأعداد المركبة

Complex Numbers

مثال 2 ضرب الأعداد التخيلية البحتة

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي :

a) $-5i \cdot 3i$

$$-5i \cdot 3i = -15i^2$$ اضرب

$$= -15(-1)$$ $i^2 = -1$

$$= 15$$ بسّط

b) $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15}$

$$\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15} = i\sqrt{6} \cdot i\sqrt{15}$$ $i = \sqrt{-1}$

$$= i^2\sqrt{90}$$ اضرب

$$= -1 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{10}$$ بسّط

$$= -3\sqrt{10}$$ اضرب

إرشادات للدراسة

خصائص الجذر التربيعي

راجع خصائص الجذر التربيعي التي درستها في الصف الثالث المتوسط.

تحقق من فهمك :-

2) بسط كلاً مما يأتي:

2A) $3i \cdot 4i$

$$3i \cdot 4i = 12\, i^2$$
$$= 12\,(-1)$$
$$= -12$$

2B) $\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12}$

$$\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12} = i\sqrt{20} \cdot i\sqrt{12}$$
$$= i^2\ \sqrt{240}$$
$$= -4\sqrt{15}$$

2	240
2	120
2	60
2	30
3	15
5	5
	1

$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

٣-١ الأعداد المركبة

Complex Numbers

يمكنك حل بعض المعادلات التربيعية باستعمال خصائص الجذر التربيعي

مثال 3 معادلة حلولها أعداد تخيلية بحتة

حل المعادلة : $4x^2 + 256 = 0$.

$4x^2 + 256 = 0$	المعادلة الأصلية
$4x^2 = -256$	اطرح 256 من كلا الطرفين
$x^2 = -64$	اقسم كلا الطرفين على 4
$x = \pm\sqrt{-64}$	خاصية الجذر التربيعي
$x = \pm 8i$	$\sqrt{-64} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{-1} = 8i$

تحقق من فهمك :-

3) حل كل معادلة مما يأتي:

3A) حل المعادلة: $4x^2 + 100 = 0$

$$4x^2 + 100 = 0$$
$$4x^2 = -100$$
$$x^2 = -25$$
$$x = \pm\sqrt{-25}$$
$$x = \pm 5i$$

3B) حل المعادلة: $x^2 + 4 = 0$

$$x^2 + 4 = 0$$
$$x^2 = -4$$
$$x = \pm\sqrt{-4}$$
$$x = \pm 2i$$

ضع رمز ± أمام رمز الجذر
عند أخذ الجذر التربيعي
لطرفي معادلة



الفصل الثالث

٣-١ الأعداد المركبة
Complex Numbers

العمليات على الأعداد المركبة : تتكون العبارة من حدين غير متشابهين ولا يمكن جمعهما، وهما العدد الحقيقي 2 والعدد التخيُّلي $3i$، ويسمى هذا النوع من العبارات **العدد المركب**.

مفهوم أساسي

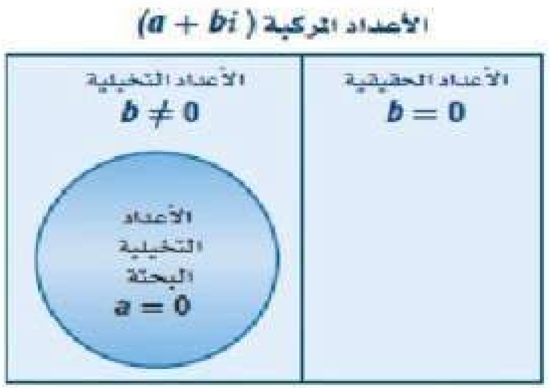
أضف إلى مطويتك

الأعداد المركبة (C)

التعبير اللفظي: العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة $a + bi$ ؛ حيث a و b عددان حقيقيان، و i الوحدة التخيلية، ويسمى a الجزء الحقيقي، و b الجزء التخيلي.

مثالان: $5 + 2i$ $1 - 3i = 1 + (-3)i$

يوضِّح شكل فن المجاور مجموعة الأعداد المركبة .



- إذا كانت $b = 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا حقيقيًا.
- إذا كانت $b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًا.
- إذا كانت $a = 0, b \neq 0$ فإن العدد المركب يكون عددًا تخيليًا بحتًا.

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزأين الحقيقيين، والجزأين التخيليين؛ أيْ أن:
$a + bi = c + di$ إذا وفقط إذا كان $a = c, b = d$.

مثال 4 تساوي الأعداد المركبة

أوجد قيمتَي x , y الحقيقيتين اللتين تجعلان المعادلة: $3x - 5 + (y - 3)i = 7 + 6i$ صحيحة.

ساوِ الجزأين الحقيقيين أحدهما بالآخر، وكذلك الجزآن التخيليان.

$3x - 5 = 7$ الجزآن الحقيقيان

$3x = 12$ اجمع 5 لكلا الطرفين

$x = 4$ اقسم كلا الطرفين على 3

$y - 3 = 6$ الجزآن التخيليان

$y = 9$ اجمع 3 لكلا الطرفين.

تحقق من فهمك :-

4) أوجد قيمتي x , y اللتين تجعلان المعادلة $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$. صحيحة.

$$5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$$

الجزآن الحقيقيان

$$5x + 1 = 2x - 2$$
$$3x = -3$$
$$x = -1$$

الجزآن التخيليان

$$3 + 2y = y - 6$$
$$y = -9$$



الفصل الثالث

٣-١ الأعداد المركبة

Complex Numbers

ويمكنك استعمال كلٍّ من الخاصية التبديلية والخاصية التجميعية وخاصية التوزيع عند جمع الأعداد المركبة وضربها، ولكي تجمع أو تطرح أعدادًا مركبة، جمّع الأجزاء المتشابهة؛ أيْ جمّع الأجزاء الحقيقية معًا وجمّع الأجزاء التخيلية معًا.

مثال 5 جمع الأعداد المركّبة وطرحها

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي :

a) $(5 - 7i) + (2 + 4i)$

$(5 - 7i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-7 + 4)i$ خواص التبديل والتجميع والتوزيع

$= 7 - 3i$ بسّط

b) $(4 - 8i) - (3 - 6i)$

$(4 - 8i) - (3 - 6i) = (4 - 3) + [-8 - (-6)]i$ خواص التبديل والتجميع والتوزيع

$= 1 - 2i$ بسّط

تحقق من فهمك :-

5) بسط كلاً مما يأتي:

5A) $(-2+5i)+(1-7i)$

$$(-2+5i)+(1-7i)=-1-2i$$

5B) $(4+6i)-(-1+2i)$

$$(4+6i)-(-1+2i)=(4+6i)+(1-2i)$$

$$=5+4i$$



الفصل الثالث

٣-١ الأعداد المركبة

Complex Numbers

تستعمل الأعداد المركبة في مسائل الكهرباء، ففي الدوائر الكهربائية ذات التيار المتناوب يمكنك تمثيل فرق الجهد، وشدة التيار، والمعاوقة بأعداد مركبة، ولضرب هذه الأعداد تستعمل طريقة التوزيع بالترتيب.

مثال 6 من واقع الحياة — ضرب الأعداد المركبة

كهرباء: يرتبط فرق الجهد V، وشدة التيار C، والمعاوقة I في الدوائر الكهربائية ذات التيار المتناوب بالصيغة $V = C \cdot I$. أوجد فرق الجهد في دائرة كهربائية ذات تيار متردد إذا كانت شدة تيارها $2 + 4i$ أمبير، ومعاوقتها $9 - 3i$ أوم.

$V = C \cdot I$	الصيغة الرياضية
$= (2 + 4i) \cdot (9 - 3i)$	$C = 2 + 4i\ ,\ I = 9 - 3i$
$= 2(9) + 2(-3i) + 4i(9) + 4i(-3i)$	باستخدام طريقة التوزيع بالترتيب
$= 18 - 6i + 36i - 12i^2$	اضرب
$= 18 + 30i - 12(-1)$	$i^2 = -1$
$= 30 + 30i$	اجمع

وعليه فإن فرق الجهد هو $30 + 30i$ فولت.

إرشادات للدراسة

المعاوقة:
في الأعداد المركبة تستعمل كلمة المعاوقة بدلًا من المقاومة.

تحقق من فهمك :-

6) أوجد فرق الجهد لتيار متردد شدته $2 - 4j$ أمبير، ومعاوقته $3 - 2j$ أوم.

شدة التيار × المقاومة = فرق الجهد

$$V = R \cdot i$$

$$= (3 - 2j) \cdot (2 - 4j)$$

$$= 6 - 12j - 4j + 8j^2$$

$$= 6 - 12j - 4j - 8$$

$$= -2 - 16j$$

فرق الجهد = $-2 - 16j$ فولت.